Chapitre 06 Fonction exponentielle. Equations differentielles.

1 Vers une nouvelle fonction

Approche historique : problème de la radioactivité puis problème de Leibniz
Résolution via la méthode d'Euler

Théorème-Définition : Il existe une unique fonction f, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on ait : $f'(x) = f(x)$ et $f(0) = 1$.
Cette fonction est appelée fonction exponentielle, elle est notée exp : $x \mapsto \exp(x)$

On va d'abord prouver le lemme suivant :

Lemme fondamental : Soit f une fonction définie et dérivable telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on ait : $f'(x) = f(x)$ et $f(0) = 1$.
Alors pour tout $x \geqslant 0$, on a : $f(x) > 0$

Preuve du lemme : Soit $\phi : x \mapsto f(x)f(-x)$.
ϕ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On a : $\phi'(x) = f'(x)f(-x) - f(x)f'(-x) = f(x)f(-x) - f(x)f(-x) = 0$.
Donc la fonction ϕ est constante. Soit k cette constante. On a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\phi(x) = k$. En particulier, $\phi(0) = (f(0))^2 = 1$, d'où : $k = 1$.
Donc $f(-x)f(x) = 1$ et donc f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.
Supposons qu'il existe $x_0$tel que $f(x_0) < 0$.
Comme f est continue sur $\mathbb{R}$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe c compris :
- entre 0 et x_0 si $x_0 > 0$
- entre x_0 et 0 si $x_0 < 0$

tel que $f(c) = 0$. Ce qui amène dans tous les cas à une contradiction, f ne s'annulant pas.
Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $f(x) > 0$.

Preuve du théorème : On admet l'existence.
Prouvons l'unicité. Supposons qu'il existe deux fonctions f_1 et f_2 telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $f_1'(x) = f_1(x)$ et $f_1(0) = 1$ et $f_2'(x) = f_2(x)$ et $f_2(0) = 1$.
D'après le lemme, ces deux fonctions ne s'annulent pas pour tout $x \in \mathbb{R}$.
On pose : $\psi : x \mapsto \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}$. ψ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, comme quotient de deux fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ et ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}$.
On a : $\psi'(x) = \dfrac{f_1'(x)f_2(x) - f_2'(x)f_1(x)}{(f_2(x))^2} = \dfrac{f_1(x)f_2(x) - f_2(x)f_1(x)}{(f_2(x))^2} = 0$, donc ψ est une constante, notée λ. Or, $\psi(0) = 1$, d'où pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $\psi(x) = 1$ et donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $f_1(x) = f_2(x)$.
D'où l'unicité.

Remarque : On a prouvé au passage grâce au lemme que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :
- $\exp(x) > 0$
- $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$

Théorème : Pour tous réels a et b, on a : $\exp(a + b) = \exp(a) \times \exp(b)$

Preuve : Comme la fonction exp ne s'annule pas, on pose pour $x \in \mathbb{R}$: $\nu(x) = \dfrac{f(x+a)}{f(a)}$, avec $f = \exp$. ν est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
$\nu'(x) = \dfrac{f'(x+a)}{f(a)} = \dfrac{f(x+a)}{f(a)} = \nu(x)$. De plus : $\nu(0) = 1$. Donc, d'après le premier théorème on a $\nu = \exp$
D'où pour $x \in \mathbb{R}$: $\dfrac{f(x+a)}{f(a)} = exp(x)$ et donc $\exp(x+a) = \exp(a)\exp(x)$ et la relation du théorème en remplaçant x par b.

Propriété : Pour tous réels a et b, on a : $\exp(a - b) = \dfrac{\exp(a)}{\exp(b)}$

Preuve :$\exp(a - b) = \exp(a + (-b)) = \exp(a) \times \exp(-b) = \exp a \times \dfrac{1}{\exp(b)} = \dfrac{\exp(a)}{\exp(b)}$.

Propriété : Pour tout réel a et tout entier $n \in \mathbb{Z}$, on a : $\exp(na) = (\exp(a))^n$

Preuve : On va tout d'abord établir le résultat par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$. On note $\mathcal{P}_n$ la proposition $\exp(na) = (\exp(a))^n$
Pour $n = 0$, $\exp(0 \times a) = 1$ et $(\exp(a))^0 = 1$, donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.
On suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie.
Montrons que $\mathcal{P}_{n+1}$ est encore vraie. On a :
$\exp((n+1)a) = \exp(na + a) = \exp(na)\exp(a) = (\exp(a))^n \times \exp(a) = (\exp(a))^{n+1}$.
Donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.
Et donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}_n$ est vraie.
Soit $n \in \mathbb{Z}\backslash\mathbb{N}$, on pose $n' = -n$. $n' \in \mathbb{N}$.
$\exp(na) = \exp(-n'a) = \dfrac{1}{\exp(n'a)} = \dfrac{1}{(\exp(a))^{n'}} = (\exp(a))^{-n'} = (\exp(a))^n$ et donc $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{Z}$.□

Nouvelle notation : On note e le nombre $\exp(1)$. Ce nombre s'appelle le nombre d'Euler. On retiendra que c'est un nombre irrationnel et que l'on a $e \approx 2,718$.
Pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$, on a : $\exp(n) = \exp(n \times 1) = (\exp(1))^n = e^n$.
Par extension à $\mathbb{R}$, on note, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\exp(x) = e^x$.

Ainsi on peut réécrire les propriétés de l'exponentielle avec cette nouvelle notation :

Résumé :

- $e^0 = 1$,
- $e^1 = e$,
- $e^{-1} = \dfrac{1}{e}$.

Pour tous réels a et b, on a :

- $e^{a+b} = e^a e^b$,
- $e^{-a} = \dfrac{1}{e^a}$,
- $e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b}$,
- pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $e^{na} = (e^a)^n$

2 Etude de la fonction exponentielle

Théorème : La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

Preuve : On a pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\exp' x = \exp x$ et $\exp x > 0$, donc la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Corollaire : Soit a et b deux réels.
(i) $a < b$ équivaut à $e^a < e^b$
(ii) $a = b$ équivaut à $e^a = e^b$

Preuve : (i) C'est une traduction de la stricte croissance
(ii) Si $a = b$, alors $e^a = e^b$, par traduction de la stricte croissance.
En partant de $e^a = e^b$,
- si on suppose que $a < b$, alors $e^a < e^b$ d'après la stricte croissance, contradiction
- si on suppose que $a > b$, alors $e^a > e^b$ d'après la stricte croissance, contradiction

donc $a = b$.

Conséquence :$e^x < 1$ équivaut à $x < 0$.

Propriété : $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

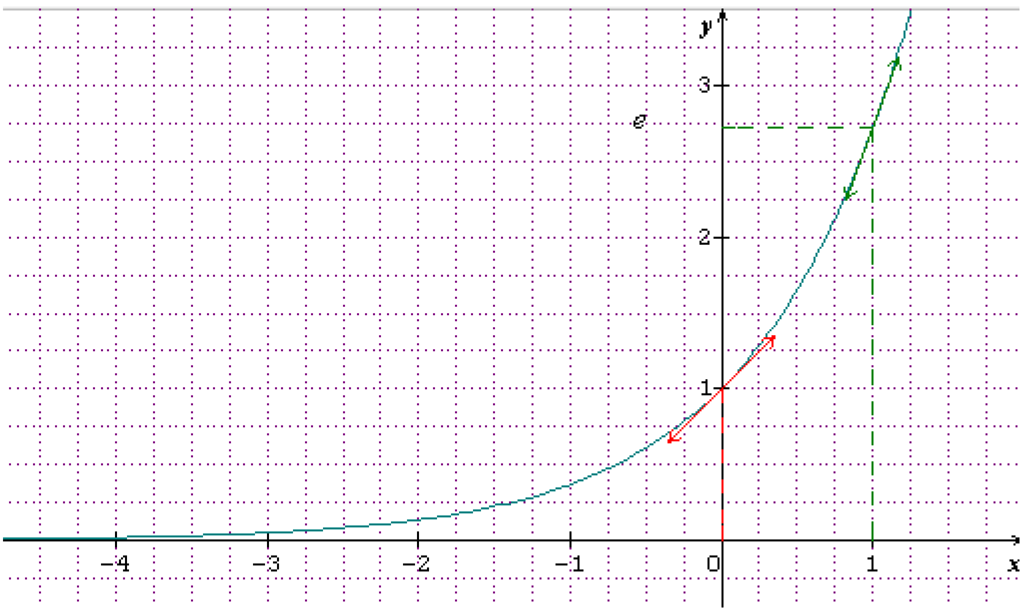
Preuve : On pose $g(x) = e^x - x$. g est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = e^x - 1$ et donc $g'(x) \geqslant 0$ ssi $e^x \geqslant 1$ ssi $x \geqslant 0$. Donc pour $x \geqslant 0$, g est croissante et donc $g(x) \geqslant g(0)$ pour $x \geqslant 0$, ou encore $g(x) \geqslant 1 > 0$. Donc pour $x \geqslant 0$, on a $e^x > x$. Or $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$, d'où $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$.

On pose $X = -x$. On a $e^x = e^{-X} = \dfrac{1}{e^X}$. Or $\lim\limits_{x \to -\infty} X = +\infty$, d'où : $\lim\limits_{x \to -\infty} e^X = +\infty$ et par suite $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{e^X} = 0$. D'où : $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$.

Tableau de variation :

	$-\infty$		0		$+\infty$
Signe de $\exp'(x)$		$+$	1	$+$	
Variations de $\exp$	0	↗	1	↗	$+\infty$

Courbe représentative de $x \mapsto e^x$:



Propriété :Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I .
Alors la fonction $\exp \circ u$ est dérivable sur I et $(\exp \circ u)^{'}(x) = u'(x)e^{u(x)}$.

Preuve : On applique le théorème sur la dérivation des fonctions composées.

Propriété :

∘ (i) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ ∘ (ii) $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0$ ∘ (iii) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

Preuve : (i) On pose : $\phi(x) = e^x - \dfrac{x^2}{2}$. ϕ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On a : $\phi'(x) = e^x - x$. On sait que pour $x \geqslant 0$, $e^x > x$, d'où : $\phi'(x) > 0$ pour $x \geqslant 0$ et donc ϕ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.

D'où pour $x > 0$: $\phi(x) > \phi(0) = 1 > 0$ et donc : $e^x > \dfrac{x^2}{2}$, ce qui équivaut encore à $\dfrac{e^x}{x} > \dfrac{x}{2}$.

Donc comme $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{2} = +\infty$, on a : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$.

(ii) On pose $X = -x$. On a : $xe^x = -Xe^{-X} = -\dfrac{X}{e^X} = -\dfrac{1}{\dfrac{e^X}{X}}$.

Or $\lim\limits_{x \to -\infty} X = +\infty$ et $\lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{e^X}{X} = +\infty$ et par suite $\lim\limits_{X \to +\infty} -\dfrac{1}{\dfrac{e^X}{X}} = 0$. D'où : $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0$.

(iii) $f : x \mapsto e^x$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et donc en particulier en 0.

Donc le taux de variation en 0, $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \dfrac{e^x - 1}{x}$ admet une limite en 0, correspondant au nombre dérivé en 0.

D'où : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = f'(0) = e^0 = 1$.

Approximation affine au voisinage de 0 de $h \mapsto e^h$:
Pour h voisin de 0, on a : $e^h = 1 + h + h\epsilon(h)$ avec $\lim\limits_{h \to 0} \epsilon(h) = 0$.

Preuve :Pour $h \neq 0$, on pose $\epsilon(h) = \dfrac{e^h - 1}{h} - 1$. Comme $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{e^h - 1}{h} = 1$, on a : $\lim\limits_{h \to 0} \epsilon(h) = 0$.
D'où pour h proche de 0, $e^h - 1 = h + h\epsilon(h)$ ou encore : $e^h = 1 + h + h\epsilon(h)$ avec $\lim\limits_{h \to 0} \epsilon(h) = 0$.