Fiche de révision Limites de Fonctions. Continuité.

1 Limites

1.1 Définitions

1.1.1 En l'infini

1.1.1.1 Limite infinie en l'infini

Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle du type $[a\,;+\infty[$. On dit que f admet pour limite $+\infty$ en $+\infty$ si pour tout nombre fixé à l'avance et aussi grand que l'on veut, $f\ (x)$ est supérieure à ce nombre dès que x est suffisamment grand.
Autrement dit, pour tout réel A, il existe x_0 tel que pour tout $x > x_0$, on a : $f(x) \geqslant A$.
On note alors : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

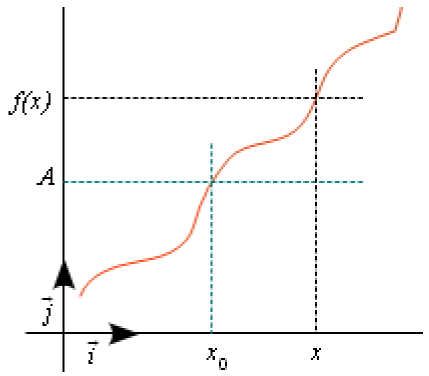


Figure 1: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle du type $[a\,;+\infty[$. Par définition : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ si $\lim\limits_{x\to+\infty} -f(x) = +\infty$

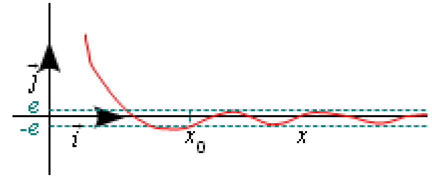
Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle du type $]-\infty\,;a]$. On dit que f admet pour limite $+\infty$ en $-\infty$ si pour tout nombre fixé à l'avance et aussi grand que l'on veut, $f\ (x)$ est supérieure à ce nombre dès que x est suffisamment négativement grand.
Autrement dit, pour tout réel A, il existe x_0 tel que pour tout $x \leqslant x_0$, on a : $f(x) \geqslant A$.
On note alors : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle du type $]-\infty\,;a]$. Par définition : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ si $\lim\limits_{x\to-\infty} -f(x) = +\infty$

1.1.1.2 Limite finie en l'infini

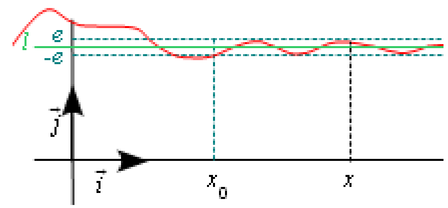
Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle du type $[a\,;+\infty[$. On dit que f admet pour limite 0 en $+\infty$ si pour tout nombre fixé à l'avance et aussi petit que l'on veut, $|f\ (x)|$ est inférieure à ce nombre dès que x est suffisamment grand.
Autrement dit, pour tout réel ϵ, il existe x_0 tel que pour tout $x > x_0$, on a : $|f(x)| \leqslant \epsilon$.
On note alors : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$



Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle du type $[a\,;+\infty[$. On dit que f admet pour limite l en $+\infty$ si $f(x) - l$ a pour limite 0 en $+\infty$
On note alors : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$



Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle du type $]-\infty\,;a]$. On dit que f admet pour limite 0 en $-\infty$ si pour tout nombre fixé à l'avance et aussi petit que l'on veut, $|f\ (x)|$ est inférieure à ce nombre dès que x est suffisamment négativement grand.
Autrement dit, pour tout réel ϵ, il existe x_0 tel que pour tout $x \leqslant x_0$, on a : $|f(x)| \leqslant \epsilon$.
On note alors : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle du type $]-\infty\,;a]$. On dit que f admet pour limite l en $-\infty$ si $f(x)-l$ a pour limite 0 en $-\infty$
On note alors : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=l$.

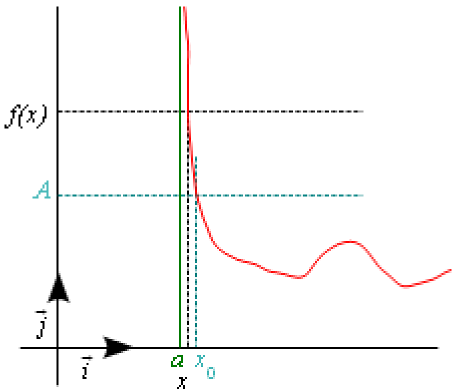
1.1.2 Limite en a

1.1.2.1 Limite infinie en a

Remarque : On ne se pose la question que dans le cas où la fonction n'est pas définie en a. Autrement dit a est une borne du domaine de définition de la fonction. On se place alors toujours du même côté.

Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle du type $]a\,;b]$. On dit que f admet pour limite $+\infty$ (respectivement $-\infty$) en a par valeurs supérieures si pour tout nombre fixé à l'avance et aussi grand (respectivement négativement grand) que l'on veut, $f\ (x)$ est supérieure (respectivement inférieure) à ce nombre dès que x est suffisamment proche de a par valeur supérieure.
On note alors : $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)=+\infty$ (respectivement $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)=-\infty$)

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)=+\infty$$



Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle du type $[b\,;\,;a[$. On dit que f admet pour limite $+\infty$ (respectivement $-\infty$) en a par valeurs inférieures si pour tout nombre fixé à l'avance et aussi grand (respectivement négativement grand) que l'on veut, $f\ (x)$ est supérieure (respectivement inférieure) à ce nombre dès que x est suffisamment proche de a par valeur inférieure.
On note alors : $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x)=+\infty$ (respectivement $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x)=-\infty$)

Asymptote verticale : La droite d'équation $x=k$ est asymptote verticale à la courbe, si f n'est pas définie en k et si f admet une limite infinie en k (par valeurs supérieures ou inférieures)

1.1.2.2 Limite finie en a

Remarque : On ne se pose la question que dans les cas suivants pour une fonction f et un réel a :

- soit f n'est pas définie en a mais où a est une borne du domaine de définition de f. On se place alors toujours du même côté de a.
- soit f est définie en a.

Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle du type $]b\,;\,;c[$. Soit a un élèment de $]b\,;c[$, éventuellement l'une de ses bornes (dans ce cas on précisera si l'on tend par valeurs supérieures ou inférieures).
On dit que f admet pour limite 0 en a (éventuellement par valeurs inférieures ou supérieures) si pour tout nombre fixé à l'avance et aussi petit que l'on veut, $|f\ (x)|$ est inférieure à ce nombre dès que x est suffisamment proche de a tout en restant dans $]b\,;\,;c[$.
On note alors : $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$ (éventuellement $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x)=0$ ou $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)=0$)

Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle du type $]b\,;\,;c[$. Soit a un élèment de $]b\,;c[$, éventuellement l'une de ses bornes (dans ce cas on précisera si l'on tend par valeurs supérieures ou inférieures).
On dit que f admet pour limite l en a (éventuellement par valeurs inférieures ou supérieures) si $f(x)-l$ admet pour limite 0 en a.
On note alors : $\lim\limits_{x\to a} f(x)=l$ (éventuellement $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x)=l$ ou $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)=l$)

1.2 Opérations sur les limites

Soit f et g deux fonctions.
On désigne par α un nombre réel a, $+\infty$ ou $-\infty$.
Soit l et l' deux nombres réels.

1.2.1 Somme de fonctions

$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)$	$\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)$	$\lim\limits_{x\to\alpha} (f(x)+g(x))$
l	l'	$l+l'$
l	$+\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	Forme indéterminée

1.2.2 Produit de fonctions

$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)$	$\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)$	$\lim\limits_{x\to\alpha} (f(x)\times g(x))$
l	l'	ll'
$l\neq 0$	$+\infty$	$\mathrm{sgn}(l)\infty$
$l\neq 0$	$-\infty$	$\mathrm{sgn}(-l)\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
0	$\pm\infty$	Forme indéterminée

1.2.3 Inverse de fonctions

$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)$	$\lim\limits_{x\to\alpha} \left(\dfrac{1}{f(x)}\right)$
$l\neq 0$	$\dfrac{1}{l}$
0	Forme indéterminée
0 par valeurs supérieures	$+\infty$
0 par valeurs inférieures	$-\infty$
$\pm\infty$	0

1.2.4 Quotient de fonctions

Pour déterminer la limite de $\dfrac{f}{g}$, on écrit $\dfrac{f}{g} = f\times\dfrac{1}{g}$. On détermine alors la limite de f et de $\dfrac{1}{g}$, ce qui permet d'en déduire la limite de $\dfrac{f}{g}$.

1.2.5 Composition de fonctions

Théorème (admis) : Soit α, β et γ trois quantités désignant soit un réel, soit $+\infty$, soit $-\infty$.
Si $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)=\beta$ et si $\lim\limits_{x\to\beta} f(x)=\gamma$, alors $\lim\limits_{x\to\alpha} (f\circ g)(x)=\gamma$

1.3 Limites et ordre

On désigne par α un nombre réel a, $+\infty$ ou $-\infty$.

1.3.1 Théorème d'encadrement

Théorème des « gendarmes » :
Soit f, g et h trois fonctions vérifiant pour « x voisin de α » : $g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$.
Si de plus $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)=l$ et $\lim\limits_{x\to\alpha} h(x)=l$, alors : $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)=l$.

Remarque : « x voisin de α » signifie si $\alpha=a$, « x proche de a », si $\alpha=+\infty$ « x suffisamment grand » et si $\alpha=-\infty$ « x suffisamment négativement grand »

Corollaire :
Si pour « x voisin de α », on a : $|f(x)-l|\leqslant g(x)$ et si $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)=0$, alors : $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)=l$.

1.3.2 Théorèmes de comparaison

Théorème :
Soit f et g deux fonctions vérifiant pour « x voisin de α » : $f(x)\leqslant g(x)$.
Si $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)=l$ et $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)=l'$, alors $l\leqslant l'$

Théorème :
Soit f et g deux fonctions vérifiant pour « x voisin de α » : $f(x)\leqslant g(x)$.
- Si $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)=+\infty$, alors $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)=+\infty$.
- Si $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)=-\infty$, alors $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)=-\infty$.

2 Continuité

2.1 Continuité en un point

Définition : Soit f une fonction définie sur D_f. Soit I un intervalle inclus dans D_f. Soit $a\in I$.
On dit que f est continue en a si f admet une limite en a et que cette limite est $f(a)$.

En pratique : f est continue en a se traduit graphiquement par le fait que la courbe de f pour x proche de a est obtenue sans « lever le crayon ».
Remarque :Si f n'est pas définie en a, f ne peut pas être continue en a.
Etre défini en a est donc une condition nécessaire pour que f soit continue en a.

2.2 Continuité d'une fonction sur un intervalle

Définition : Soit f une fonction définie sur D_f. Soit I un intervalle inclus dans D_f. On dit que f est continue sur I si f est continue en tout point de I.

Propriété : La somme, le produit et la composée de fonctions continues sur un intervalle I inclus dans leur domaine de définition sont continues sur I.
Le quotient de deux fonctions continues sur I est continue sur I privé des points où le quotient n'est pas défini.

Propriété : Les fonctions polynômes, cosinus et sinus sont continues sur $\mathbb{R}$.
La fonction racine carrée est continue sur $[0\,;+\infty[$.
Les fonctions rationnelles sont continues sur chacun des domaines où elles sont définies.

2.3 Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème : Soit f une fonction définie et continue sur I. Soit a et b deux éléments de I. Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel c compris entre a et b tel que $f(c) = k$.

Remarque :Autrement dit chacune des valeurs comprises entre $f(a)$ et $f(b)$ est prise au moins une fois.

Corollaire (dit théorème de la bijection) : Soit f une fonction continue strictement monote sur un intervalle $[a\,;b]$.
Alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans $[a\,;b]$.
f réalise alors une bijection de $[a\,;b]$ sur $[f(a)\,;f(b)]$ou $[f(b)\,;f(a)]$

Remarques :

- Ce corollaire est encore valable sur un intervalle I ouvert ou semi-ouvert, borné ou non.

Dans ce cas $f(a)$ et $f(b)$ deviennent éventuellement $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $\lim\limits_{x\to b} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$
Par exemple, si $I = [a\,;+\infty[$ et si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, pour tout réel $k \geqslant f(a)$, il existe un unique $c \geqslant a$, tel que $f(c) = k$.

- Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$. Une fonction f de I dans J est une bijection de I sur J si :
  - tout réel de I admet une image par f dans J ;
  - tout réel de J admet un unique antécédent dans I.
- Un cas particulier intéressant du corollaire du TVI : Si une fonction continue strictement monotone change de signe sur un intervalle I, alors elle s'annule exactement une fois sur cet intervalle.

On peut traduire cela différemment : Soit f une fonction continue strictement monotone sur un intervalle $[a\,;b]$. Si $f(a)f(b) < 0$, alors il existe un unique $c \in [a\,;b]$ tel que $f(c) = 0$.
