Fiche de Révision : Dérivation.

1 Nombre dérivé

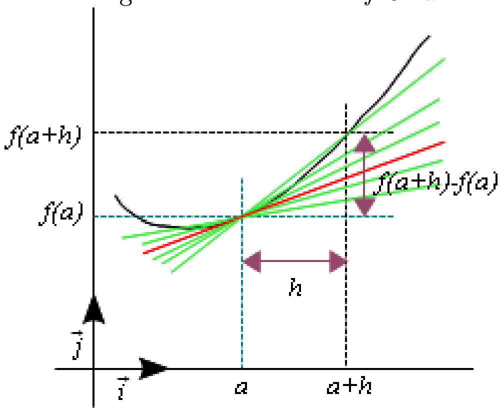
1.1 Nombre dérivé

<u>Définition :</u> Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un élément de I, qui ne soit pas une borne. Si le taux d'accroissement $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ admet une limite finie quand h tend vers 0, alors on dit que f est dérivable en a. On appelle alors nombre dérivé en a la valeur de la limite de ce taux d'accroissement, que l'on note $f'(a)$. Autrement dit, si f est dérivable en a, $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a)$.

<u>Définition :</u>Avec les mêmes hypothèses, l'ensemble des nombres a pour lesquels $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ admet une limite finie quand h tend vers 0, est appelé domaine de dérivabilité de f.

1.2 Tangente en un point

Tangente à la courbe de f en a



<u>Définition :</u> Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un élément de I tel que f soit dérivable en a.
On appelle tangente à la courbe représentative de f en le point d'abscisse a la droite passant par le point de coordonnées $(a, f(a))$ et de coefficient directeur $f'(a)$.

<u>Propriété :</u> La tangente à la courbe représentative de f en le point d'abscisse a a pour équation $y=f(a)+f'(a)(x-a)$.

1.3 Approximation affine

<u>Propriété-Définition :</u>
Soit f une fonction définie sur un intervalle I, soit $a \in I$.
Si f est dérivable en a, alors il existe une fonction ϕ telle que pour tout réel h tel que $a+h\in I$, on a $f(a+h)=f(a)+hf'(a)+h\phi(h)$ et $\lim\limits_{h\to 0}\phi(h)=0$.
On dit que $f(a)+hf'(a)$ est l'approximation affine de f au voisinage de a .
Autrement dit pour x proche de : $f(x)\approx f'(a)(x-a)+f(a)$

2 Dérivée et sens de variation

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et soit D le domaine de dérivabilité de f .

<u>Définition :</u> La fonction, notée f', qui à tout $x\in D$, associe $f'(x)$, nombre dérivé de f en x, est appelée fonction dérivée de f sur D .

<u>Théorème :</u>
Soit un intervalle J inclus dans D.
Si f est croissante sur J, alors pour tout $x\in J$, $f'(x)\geqslant 0$.
Si f est décroissante sur J, alors pour tout $x\in J$, $f'(x)\leqslant 0$.
Si f est constante sur J, alors pour tout $x\in J$, $f'(x)=0$.

<u>Théorème réciproque (admis) (principe de Lagrange) :</u>
Soit un intervalle J inclus dans D.
Si pour $x\in J$, $f'(x)\geqslant 0$, alors f est croissante sur J.
Si pour $x\in J$, $f'(x)\leqslant 0$, alors f est décroissante sur J.
Si pour $x\in J$, $f'(x)=0$, alors f est constante sur J.
De plus, si, pour $x\in J$, $f'x)>0$ et que f' ne s'annule qu'en un nombre fini de points, alors f est strictement croissante sur J.
De plus, si, pour $x\in J$, $f'x)<0$ et que f' ne s'annule qu'en un nombre fini de points, alors f est strictement décroissante sur J.

<u>Notion d'extremum local :</u>

<u>Définition :</u>
Soit f une fonction définie sur I et soit $a\in I$.
On dit que $f(a)$ est un minimum local (respectivement un maximum local) de la fonction f sur I, lorsque $f(a)$ est la plus petite (respectivement la plus grande) valeur de f sur un intervalle ouvert contenu dans I et contenant a.
f admet un extremum local si elle admet un minimum ou un maximum local.

<u>Théorème :</u>
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I. Soit $a\in I$.
Si f admet un extremum local en a, alors $f'(a)=0$.

Attention ! La réciproque est fausse ! Par exemple : $f(x) = x^3$ et $a = 0$.

Théorème réciproque :
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I. Soit $a \in I$.
Si f' s'annule en a en changeant de signe, alors f admet un extremum local en a.

3 Calcul de dérivées

3.1 Dérivée des fonctions usuelles

Fonction f	Dom. définition de f	Fonction dérivée f'	Dom. dérivabilité
$f(x) = k$	$\mathbf{R}$	$f'(x) = 0$	$\mathbf{R}$
$f(x) = x^n$, où $n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbf{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbf{R}$
$f(x) = \dfrac{1}{x^n}$, où $n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbf{R}^*$	$f'(x) = -\dfrac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbf{R}^*$
$f(x) = \sqrt{x}$	$\mathbf{R}_+$	$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbf{R}_+^*$
$f(x) = \sin x$	$\mathbf{R}$	$f'(x) = \cos x$	$\mathbf{R}$
$f(x) = \cos x$	$\mathbf{R}$	$f'(x) = -\sin x$	$\mathbf{R}$

3.2 Opération sur les dérivées

3.2.1 Dérivée d'une somme

Propriété :
Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle J, de fonctions dérivées u' et v'.
Alors la somme de ces deux fonctions est dérivable sur J et on a : $(u+v)' = u' + v'$

3.2.2 Dérivée d'une multiplication par un scalaire

Propriété :
Soit u une fonction dérivable sur un intervalle J, de fonctions dérivées u' . Soit k un réel.
Alors la fonction ku est dérivable sur J et on a : $(ku)' = ku'$

3.2.3 Dérivée d'un produit

Propriété :
Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle J, de fonctions dérivées u' et v'.
Alors le produit de ces deux fonctions est dérivable sur J et on a : $(uv)' = u'v + v'u$

3.2.4 Dérivée de l'inverse d'une fonction, d'un quotient

Propriété :
Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle J, avec v ne s'annulant pas sur J, de fonctions dérivées u' et v'.
Alors l'inverse de la fonction v est dérivable et : $\left(\dfrac{1}{v}\right)' = -\dfrac{v'}{v^2}$
Alors le quotient de u par v est dérivable sur J et on a : $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$

3.2.5 Dérivée de la composée de deux fonctions

Propriété :
Soit v une fonction dérivable sur J, de fonction dérivée v'.
Soit u une fonction dérivable sur I, telle que$u(I) \subset J$, de fonction dérivée u'.
Alors la composée $v \circ u$ est dérivable sur I et on a pour $x \in I$: $(v \circ u)'(x) = v'(u(x)) \times u'(x)$

Cas particuliers importants :
Soit u une fonction dérivable sur I et n un entier naturel non nul.
- Alors u^n est dérivable sur I, et $(u^n)' = nu^{n-1}u'$
- Si de plus u ne s'annule pas sur I, alors $\dfrac{1}{u^n}$ est dérivable sur I, et $\left(\dfrac{1}{u^n}\right)' = -n\dfrac{u'}{u^{n+1}}$
- Si u est une fonction strictement positive sur I, alors $\sqrt{u}$ est dérivable et $(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$.

4 Dérivabilité et continuité

Théorème :
Soit f une fonction définie sur un domaine D. Soit I un intervalle inclus dans D.
Soit $a \in I$
Si f est dérivable en a, alors f est continue en a.
Si f est dérivable sur I, alors f est continue sur I.

Attention ! La réciproque est fausse.
Par exemple $x \mapsto |x|$ est continue en 0, mais n'est pas dérivable en 0.

5 Notation différentielle

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Soit $x \in I$ et $h \in \mathbb{R}$ tel que $x+h \in I$.

On a : $f(x+h) = f(x) + hf'(x) + h\epsilon(h)$, avec $\lim\limits_{h \to 0} \epsilon(h) = 0$.

On pose : $\Delta x = x + h - x = h$ et $\Delta y = f(x+h) - f(x)$.

On a : $\Delta y = f'(x)\Delta x + \epsilon(\Delta x)\Delta x$, avec $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \epsilon(\Delta x) = 0$.

Lorsque Δx devient infinitésimal (très petit) la relation précédente s'écrit : $\mathrm{d}y = f'(x)\mathrm{d}x$. Cette écriture est appelé l'écriture différentielle. On peut aussi écrire : $\mathrm{d}f = f'(x)\mathrm{d}x$

On note souvent en physique : $f'(x) = \dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$.

<u>Remarque :</u> En utilisant cette notation, on a pour $f = v \circ u$.

On pose $y = u(x)$. On a : $\mathrm{d}y = u'(x)\mathrm{d}x$

On a : $f(y) = v(y)$. D'où : $\mathrm{d}f = v'(y)\mathrm{d}y$, d'où : $\mathrm{d}f = v'(u(x))u'(x)\mathrm{d}x$.

Ou en physique : $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}y}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$, soit encore : $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(a) = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}(u(a))\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}(a)$.

6 Application à l'étude de la fonction tangente

<u>Théorème :</u>
La fonction tangente est définie pour $x \in \mathbb{R} \backslash \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$
C'est une fonction périodique de période π et impaire.
La fonction tangente est dérivable sur $\mathbb{R} \backslash \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$, et pour tout $x \in \mathbb{R} \backslash \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$, on a :

$$\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$