Chapitre 08 Fonctions puissances.

1 Fonctions puissances

1.1 Puissances réelles

Introduction : Soit $a > 0$. Comme pour n entier, $\ln a^n = n \ln a$, on a par passage à l'exponentielle $a^n = e^{n \ln a}$. On va prolonger l'écriture a^n à n réels.

Définition : Soit $a > 0$. Soit α un réel. On appelle puissance α de a le réel noté a^α tel que : $a^\alpha = e^{\alpha \ln a}$.

Remarque : $a^\alpha > 0$.
Exemple : $3^\pi = e^{\pi \ln 3}$, $\pi^{2,7} = e^{2,7 \ln \pi}$, ...
Remarque : L'écriture a^α n'a de sens pour $a < 0$ que pour $\alpha \in \mathbb{Z}$.

Propriété : Soit $a > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.
On a : $\ln a^\alpha = \alpha \ln a$.

Preuve : Immédiat

Propriété : Soit $a > 0$ et $b > 0$. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}$.

- $a^0 = 1$
- $1^\alpha = 1$
- $a^\alpha a^\beta = a^{\alpha+\beta}$
- $a^\alpha b^\alpha = (ab)^\alpha$
- $(a^\alpha)^\beta = a^{\alpha\beta}$
- $\dfrac{1}{a^\alpha} = a^{-\alpha}$
- $\dfrac{a^\alpha}{b^\alpha} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^\alpha$
- $\dfrac{a^\alpha}{a^\beta} = a^{\alpha-\beta}$

Preuve :
- $a^0 = e^{0 \ln a} = e^0 = 1$
- $1^\alpha = e^{\alpha \ln 1} = e^0 = 1$
- $a^\alpha a^\beta = e^{\alpha \ln a} e^{\beta \ln a} = e^{\alpha \ln a + \beta \ln a} = e^{(\alpha+\beta)\ln a} = a^{\alpha+\beta}$
- $a^\alpha b^\alpha = e^{\alpha \ln a} e^{\alpha \ln b} = e^{\alpha \ln a + \alpha \ln b} = e^{\alpha(\ln a + \ln b)} = e^{\alpha \ln ab} = (ab)^\alpha$
- $(a^\alpha)^\beta = \left(e^{\alpha \ln a}\right)^\beta = e^{\beta \ln e^{\alpha \ln a}} = e^{\beta\alpha \ln a} = a^{\alpha\beta}$
- $\dfrac{1}{a^\alpha} = \dfrac{1}{e^{\alpha \ln a}} = e^{-\alpha \ln a} = a^{-\alpha}$
- $\dfrac{a^\alpha}{b^\alpha} = a^\alpha \times \dfrac{1}{b^\alpha} = a^\alpha \times b^{-\alpha} = a^\alpha \times \left(b^{-1}\right)^\alpha = \left(ab^{-1}\right)^\alpha = \left(\dfrac{a}{b}\right)^\alpha$
- $\dfrac{a^\alpha}{a^\beta} = a^\alpha \times \dfrac{1}{a^\beta} = a^\alpha \times a^{-\beta} = a^{\alpha-\beta}$

Remarque : Pour $\alpha = \dfrac{1}{2}$ et $a > 0$, on a : $a^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}\ln a} = e^{\ln \sqrt{a}} = \sqrt{a}$

1.2 Etude des fonctions puissances (Hors programme)

Définition : Soit α un réel. On appelle fonction puissance, la fonction f_α définie sur $\mathbb{R}_+^*$par $f_\alpha(x) = x^\alpha$

Remarque : Les fonctions puissances s'étudient sans problème puisque : $f_\alpha(x) = x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$

Propriété : Soit α un réel. La fonction f_α est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$et $f'_\alpha(x) = \alpha x^{\alpha-1}$

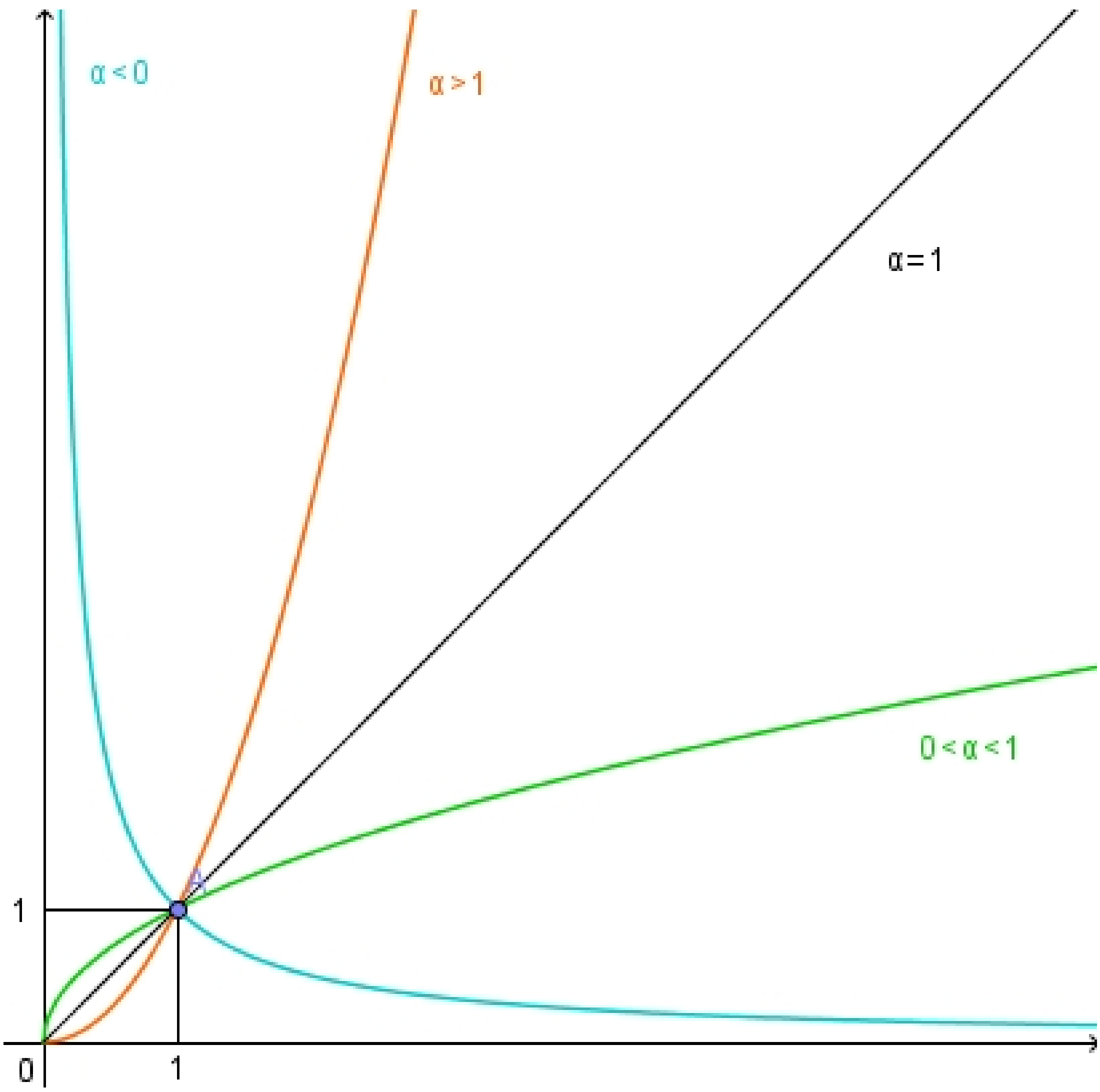
Preuve : $f_\alpha(x) = e^{\alpha \ln x}$, d'où : $f'_\alpha(x) = \alpha e^{\alpha \ln x} \times \dfrac{1}{x} = \alpha \dfrac{x^\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}$.

Variations de f_α : Soit α un réel.
Si $\alpha > 0$, la fonction f_α est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
Si $\alpha < 0$, la fonction f_α est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Propriété : Soit α et β deux réels.
Si $x > 1$, alors x^α et x^β sont rangés dans le même ordre que α et β.
Si $0 < x < 1$, alors x^α et x^β sont rangés dans l'ordre inverse de α et β.

Preuve : $x^{\alpha} < x^{\beta} \Leftrightarrow e^{\alpha \ln x} < e^{\beta \ln x} \Leftrightarrow \alpha \ln x < \beta \ln x$.
Si $x > 1$, $\ln x > 0$, et donc $x^{\alpha} < x^{\beta} \Leftrightarrow \alpha < \beta$.
Si $0 < x < 1$, $\ln x < 0$, et donc $x^{\alpha} < x^{\beta} \Leftrightarrow \alpha > \beta$.

Représentation graphique :



2 Fonctions racines n-ièmes

Propriété Définition : Soit $a \geqslant 0$ et un entier $n \geqslant 2$. Il existe un unique nombre strictement positif qui élevé à la puissance n donne a. Ce nombre est appelé racine n-ième de a et est noté $\sqrt[n]{a}$.

Preuve : On note $f : x \mapsto x^n$. f est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+$. On a : $f'(x) = nx^{n-1}$. Sur $\mathbb{R}_+$ la fonction f est donc strictement croissante, comme $f(0) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, il existe d'après le théorème de la bijection un unique $\alpha \in \mathbb{R}_+$ tel que $f(\alpha) = \alpha^n = a$.

Remarques : 1. Pour $n = 2$, on retrouve la racine carrée.

2. On a d'après le paragraphe 1, pour $x > 0$: $x^n = a \Leftrightarrow e^{n \ln x} = a \Leftrightarrow n \ln x = \ln a \Leftrightarrow \ln x = \dfrac{1}{n} \ln a \Leftrightarrow \ln x = \ln a^{\frac{1}{n}} \Leftrightarrow x = a^{\frac{1}{n}}$, d'où la propriété suivante :

Propriété Soit $a > 0$ et n un entier tel que $n \geqslant 2$.

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}.$$

Remarque : L'écriture $\sqrt[n]{a}$ est définie pour $a = 0$ alors que l'écriture $a^{\frac{1}{n}}$ n'a pas de sens pour a nul.

Définition : Soit un entier $n \geqslant 2$. On appelle fonction racine n-ième la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f_n : x \mapsto \sqrt[n]{x}$.

Pour l'étude on se réfère à ce qui a donc été fait sur les fonctions puissances. A noter que :

> Propriété
> La fonction racine n-ième est continue sur $\mathbb{R}_+$.
> $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt[n]{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$.
> La fonction racine n-ième est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $(\sqrt[n]{x})' = \dfrac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}$.
> La fonction racine n-ième est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

Preuve : $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt[n]{x} = \lim\limits_{x\to 0} x^{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{1}{n}\ln x} = 0 = \sqrt[n]{0}$, la racine n-ième est donc continue en 0. De plus $x \mapsto \sqrt[n]{x} = e^{\frac{1}{n}\ln x}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ comme composée de fonction continue sur $\mathbb{R}_+^*$. D'où le résultat.

$\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt[n]{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{n}\ln x} = +\infty$.

Pour la dérivée, on applique le résultat des fonctions puissances, idem pour le sens de variation.

Remarque : $\dfrac{\sqrt[n]{x}-0}{x-0} = x^{\frac{1}{n}-1} = e^{-\frac{n-1}{n}\ln x}$ et donc $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[n]{x}-0}{x-0} = +\infty$, donc la fonction racine n-ième n'est pas dérivable en 0.

3 Etude des fonctions exponentielles

> Définition : Soit $a > 0$. On appelle fonction exponentielle de base a, notée $\exp_a$, la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\exp_a : x \mapsto a^x$.

Remarques : (i) Si $a = 1$, $\exp_1(x) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On suppose donc $a \neq 1$ pour la suite.

(ii) Soit $a > 0$ et $a \neq 1$, on appelle fonction logarithme de base a, la fonction notée $\log_a$, définie sur $\mathbb{R}$ par : $\log_a : x \mapsto \dfrac{\ln x}{\ln a}$.

On a : $(\exp_a \circ \log_a)(x) = a^{\frac{\ln x}{\ln a}} == e^{\frac{\ln x}{\ln a}\ln a} = e^{\ln x} = x$ et $(\log_a \circ \exp_a)(x) = \dfrac{\ln a^x}{\ln a} = \dfrac{\ln e^{x\ln a}}{\ln a} = \dfrac{x\ln a}{\ln a} = x$

Les fonctions $\exp_a$ et $\log_a$ sont réciproques l'une de l'autre.
Leurs courbes représentatives sont donc symétriques l'une de l'autre.

> Propriété : Soit $a > 0$ et $a \neq 1$. La fonction $\exp_a$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\exp_a'(x) = (\ln a)\, a^x$

Preuve : $\exp_a(x) = e^{x\ln a}$. On pose $u(x) = x\ln a$. u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $u'(x) = \ln a$. On a : $\exp_a = \exp \circ u$ qui est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\exp_a'(x) = \exp'(u(x)) \times u'(x) = a^x \times \ln a$.□

> Propriété :
>
> Si $a > 1$, la fonction $\exp_a$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$
>
> Si $a < 1$, la fonction $\exp_a$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Preuve : Le signe de $\exp_a'(x)$ ne dépend que de $\ln a$ car $a^x > 0$ d'où le résultat.□

> Propriété :
>
> Si $a > 1$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \exp_a(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \exp_a(x) = 0$.
>
> Si $a < 1$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \exp_a(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \exp_a(x) = +\infty$.

Preuve : $\exp_a(x) = e^{x\ln a}$ et
si $a > 1$, $\ln a > 0$, d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln a = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x\ln a = -\infty$ d'où le résultat.
si $a < 1$, $\ln a < 0$, d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln a = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x\ln a = +\infty$ d'où le résultat.□

Propriété :

Si $a > 1$,

	$-\infty$	$+\infty$
Signe de $\exp_a'(x)$	$+$	
Variations de $\exp_a$	0 $\nearrow$	$+\infty$

Si $a < 1$,

	$-\infty$	$+\infty$
Signe de $\exp_a'(x)$	$-$	
Variations de $\exp_a$	$+\infty$ $\searrow$	0

4 Croissances comparées

On se limite à la fonction ln, la fonction exp et aux fonctions puissances entières.

Théorème : Soit $n \geqslant 1$ un entier.
$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$.

Remarque : Autrement dit, au voisinage de $+\infty$, l'exponentielle croît indéfiniment plus vite que (autrement dit l'emporte sur) la puissance n-ième d'un nombre et la puissance n-ième d'un nombre l'emporte sur le logarithme népérien.

Preuve : On pose $X = x^n$. On a : $\lim_{x\to+\infty} X = +\infty$

On a $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^n} = \lim_{X\to+\infty} \frac{\ln X^{\frac{1}{n}}}{X} = \lim_{X\to+\infty} \frac{1}{n}\frac{\ln X}{X} = \frac{1}{n}\lim_{X\to+\infty} \frac{\ln X}{X} = 0.$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} e^{n\ln x}e^{-x} = \lim_{x\to+\infty} e^{n\ln x - x} = \lim_{x\to+\infty} e^{x\left(-1+n\frac{\ln x}{x}\right)}$. Or, $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$, d'où : $\lim_{x\to+\infty} -1+n\frac{\ln x}{x} = -1$ et donc : $\lim_{x\to+\infty} x\left(-1+n\frac{\ln x}{x}\right) = -\infty$ et par suite : $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} e^{x\left(-1+n\frac{\ln x}{x}\right)} = 0.$

Conséquences :
(i) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{e^x} = 0$.
(ii) Soit $n \geqslant 1$ un entier. $\lim_{x\to 0} x^n \ln x = 0$.
(iii) $\lim_{x\to+\infty} x^n e^{-x} = 0$ et $\lim_{x\to-\infty} x^n e^x = 0$.

Preuve : (i) On a pour $x > 0$, $\frac{\ln x}{e^x} = \frac{\ln x}{x} \times \frac{x}{e^x}$. Or, $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0$ d'où : $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{e^x} = 0$.
(ii) On pose pour $x > 0$: $X = \frac{1}{x}$. On a : $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} X = +\infty$.

$\lim_{x\to 0} x^n \ln x = \lim_{X\to+\infty} \frac{1}{X^n} \ln\frac{1}{X} = \lim_{X\to+\infty} -\frac{\ln X}{X^n} = 0$

(iii) $\lim_{x\to+\infty} x^n e^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$.
En posant $X = -x$. On a : $\lim_{x\to-\infty} X = +\infty$.
D'où : $\lim_{x\to-\infty} x^n e^x = \lim_{X\to+\infty} (-X)^n e^{-X} = \lim_{X\to+\infty} (-1)^n X^n e^{-X} = (-1)^n \lim_{X\to+\infty} X^n e^{-X} = 0.\square$

Théorème : Soit P un polynôme de degré n.
$\lim_{x\to+\infty} \frac{P(x)}{e^x} = 0$ et $\lim_{x\to-\infty} P(x)e^x = 0$

Preuve : Soit n le degré du polynôme. On factorise par x^n et on applique le théorème précédent.$\square$
